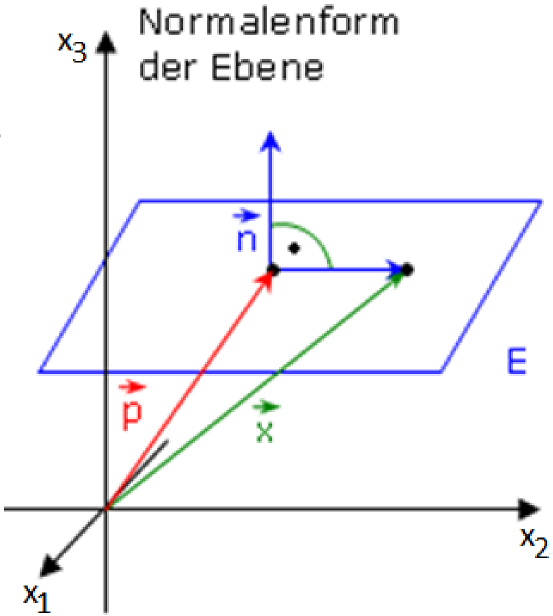
# Normalenform einer Ebene

Eine besonders einfache Darstellung ergibt sich mit Hilfe eines Normalenvektors.

Jeder Vektor $\overrightarrow{PX} = \vec{x} - \vec{p}$ innerhalb der Ebene liegt senkrecht zu $\vec{n}$.
Daraus erhält man die Normalenform:




$$E\colon \boxed{(\vec{x} - \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}}) \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{Normalenvektor}} = 0}$$

Beispiel: $E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

# Koordinatenform der Ebene

Durch Ausmultiplizieren der Normalenform erhält man die Koordinatenform:

$$E\colon\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Aus der Koordinatenform kann man den Normalenvektor der Ebene direkt ablesen (blau dargestellt).

Beispiel: $E\colon\ 2x_1 - 3x_2 + 1x_3 = 4$

Der Normelenvektor von $E$ ist dann $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

# Aufgabe

Gegeben sei die Ebene $E$ durch $E$: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$.

a) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von $E$.

b) Liegt der Punkt $P(7|0|-3)$ auf $E$?

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 0$$

# Lösung

Die Koordinatenform lässt sich auf zwei Arten bestimmen.

**Methode 1:** Ausmultiplizieren der Normalenform (aufwändig)

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-2\\x_3-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - 1) \cdot 2 + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x_1 - 2 + x_2 - 2 + 2x_3 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$E\colon\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Keine Sorge, es geht auch einfacher!

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

# Lösung

**Methode 2:** Die Koordinaten des Normalenvektors sind die Koeffizienten in der Koordinatenform:

$$E\colon\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$$

Setze nun einfach den Stützvektor ein und erhalte $d$.

$$2 \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 10 = d$$

Somit gilt:

$$E\colon\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

Das war schon alles!

# Lösung

**Liegt der Punkt $\boldsymbol{P(7|0|-3)}$ auf $\boldsymbol{E}$?**

Setze einfach die Koordinaten von $P$ ein und prüfe, ob die Koordinatengleichung erfüllt wird:

$$2 \cdot 7 + 0 + 2 \cdot (-3) = 8 \neq 10$$

**Ergebnis:** Der Punkt $P$ liegt nicht in $E$.